Logika & Matematika

Kemampuan seseorang dalam berpikir logis, kreatif, dan kritis di era digital ini sangatlah diperlukan guna memperoleh temuan-temuan baru atau inovasi di berbagai bidang. Matematika atau lebih khusus lagi Matematika Diskrit merupakan salah satu bidang ilmu, yang apabila dibelajarkan/dipelajari secara efektif, akan mampu memberikan dasar-dasar dalam berpikir logis, kreatif, dan kritis (dominasi otak kiri).

Buku *Logika & Matematika* ini dapat digunakan sebagai buku ajar atau buku referensi yang menunjang pembelajaran mata kuliah Matematika Diskrit. Dengan mempelajari buku ini, mahasiswa diharapkan mampu meningkatkan kemampuannya dalam berpikir logis, kreatif, dan kritis. Kemampuan itu tentunya akan sangat berguna bagi mahasiswa/pembaca dalam menunjang pencapaian kompetensi berikutnya sebagai *programmer*, analis sistem, pengembang sistem informasi, pengembang multimedia/*game*, dan kompetensi lainnya yang relevan.

Buku ini membahas materi tentang logika, teori himpunan, relasi, fungsi, barisan, dan teori graf. Penyajiannya diupayakan dengan bahasa yang mudah dipahami oleh pembaca dengan disertai beberapa contoh latihan dan soal. Kompetensi yang ingin dicapai adalah agar mahasiswa mampu memahami dan menerapkan konsep-konsep, prosedur, dan prinsip yang berhubungan dengan materi tersebut. Dengan kemampuan tersebut, diharapkan mahasiswa/pembaca mampu menganalisis dan menyelesaikan soal-soal atau permasalahan yang relevan.

SCIENCE & NATURE
ISBN: 978-979-29-6380-8

Penerbit ANDI
Jl. Beo 38-40 Yogyakarta
Telp. (0274) 561881 Fax. (0274) 588282
e-mail : penerbitan@andipublisher.com
andi.publishing@gmail.com
website: www.andipublisher.com

PENERBIT ANDI

STIKOM BALI

Logika & Matematika

Muhammad Rusli
I Ketut Putu Suniantara
Anggun Nugroho

LOGIKA & MATEMATIKA
Oleh: **Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara, Anggun Nugroho**

Editor	: Elizabeth Kurnia
Desain Cover	: Danynofiyanto
Setter	: Aji
Korektor	: Bella Belinda

Penerbit oleh Penerbit ANDI (Anggota IKAPI)
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

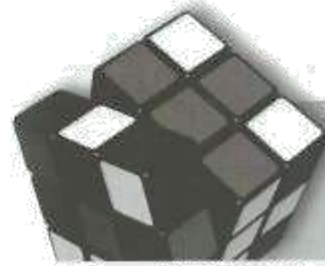
Percetakan: CV. ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan (KDT)

Rusli, Muhammad
LOGIKA & MATEMATIKA / Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara, Anggun Nugroho
– Ed. I. – Yogyakarta: ANDI;

27 – 26 – 25 – 24 – 23 – 22 – 21 – 20 – 19 – 18
hlm viii + 152; 16 x 23 Cm.
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
ISBN: 978 - 979 - 29 - 6380 - 9
I. Judul
1. Mathematical Logic
2. Suniantara, I Ketut Putu
3. Nugroho, Anggun

DDC'23 : 511.3



KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya buku *Logika dan Matematika* dapat kami selesaikan dengan baik. Buku ini ditulis sebagai buku ajar yang mendukung pembelajaran mata kuliah Matematika Diskrit.

Matematika Diskrit merupakan mata kuliah inti dalam bidang komputer yang bertipe prinsip dan tentunya memiliki level abstraksi yang cukup tinggi. Pembelajaran mata kuliah ini ditujukan untuk mahasiswa Program Studi S1 Rumpun Ilmu Komputer semester satu.

Buku ajar ini akan sangat membantu mahasiswa dalam meningkatkan kemampuan bernalar secara logis dan kritis, melatih kemampuan otak kiri (beserta memorinya) agar lebih berkembang, serta mampu meningkatkan efektivitas dan efisiensi proses komputasinya. Kemampuan ini tentunya sangat berguna bagi mahasiswa dalam proses pencapaian kompetensi sebagai seorang *programmer*, analis sistem, pengembang sistem informasi, pengembang multimedia/*game*, dan kompetensi lainnya yang relevan.

Buku ini membahas topik-topik tentang logika, teori himpunan, relasi, fungsi, barisan, dan teori graf. Kompetensi yang ingin dicapai dengan keberadaan buku ini adalah agar mahasiswa/pembaca mampu memahami dan menerapkan konsep, prosedur, dan prinsip yang berhubungan dengan materi Logika, Teori Himpunan, Relasi, Fungsi, Barisan, dan Graf. Dengan kemampuan tersebut, mahasiswa/pembaca diharapkan mampu menganalisis dan memecahkan/menyelesaikan soal-soal/permasalahan yang relevan.

Kiranya tiada gading yang tak retak, kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan. Semoga bermanfaat dan terima kasih atas segala perhatiannya.

Denpasar, Januari 2018

Penyusun

DAFTAR ISI

BAB 1 LOGIKA

Bab ini membahas:

1. Logika Proposisi
2. Penghubung Proposisi
3. Penalaran Deduktif
4. Predikat
5. Latihan

Di dunia ini selalu ada dua hal yang berbeda atau berlawanan. Sebagai contoh, ada siang atau malam, ada warna hitam atau putih, ada panas atau dingin, ada timur atau barat, ada kutub selatan atau kutub utara, dan lain sebagainya. Ambil salah satu contoh, kalau tidak siang, pastilah (secara logis dapat disimpulkan) malam.

Logika adalah studi tentang prinsip-prinsip penalaran yang benar/valid/sahih. Ia fokus pada hubungan (*relationship*) antarstatemen atau proposisi dan bukan isi statemen tersebut. Logika berperan penting dalam ilmu matematika, misalnya untuk membuktikan teorema. Demikian juga dalam ilmu komputer, logika berguna dalam membuktikan apakah sebuah program yang disusun berjalan sebagaimana yang diharapkan.

1.1. Logika Proposisi

Sebuah proposisi merupakan sebuah koleksi dari statemen-statemen deklaratif yang *memiliki* nilai kebenaran "benar atau *true*" atau "salah atau *false*" (salah satu). Sebuah proposisi bisa terdiri atas sebuah statemen (proposisi tunggal) atau beberapa statemen dengan konektor/penghubung (proposisi majemuk). Variabel-variabel proposisi dan penghubung-penghubung (koneksi-koneksi). Proposisi (atau variabel proposisi) dinyatakan dengan huruf besar (A, B, dan seterusnya). Konektor/penghubung berperan untuk menghubungkan variabel-variabel proposisi. Tujuan dari logika proposisi adalah menganalisis nilai kebenaran proposisi baik secara individu/tunggal ataupun majemuk.

Beberapa contoh proposisi dan nilai kebenarannya:

1. Jakarta adalah ibu kota Negara Indonesia (benar).
2. Setiap empat persegi panjang adalah bujur sangkar (salah).
3. 4 adalah bilangan genap (benar).
4. $12 + 8 = 8 - 2$ (salah).

Kalimat berikut adalah contoh-contoh kalimat non-deklaratif (bukan proposisi/statemen):

1. X adalah kurang dari 5.
2. Pukul berapa sekarang?
3. Silahkan tinggalkan tempat ini sekarang!

Beberapa bentuk kalimat yang non-deklaratif:

1. Kalimat dengan eksklamasi (!)
2. Kalimat permintaan
3. Kalimat bertanya (?)

1.2. Penghubung Proposisi

Dalam logika proposisi, terdapat lima macam konektor (penghubung) seperti berikut ini:

1. Atau (*or*), dengan simbol $\vee$
2. Dan (*and*), dengan simbol $\wedge$

dengan konektor/penghubung (proposisi majemuk). Variabel-variabel proposisi dan penghubung-penghubung (koneksi-koneksi). Proposisi (atau variabel proposisi) dinyatakan dengan huruf besar (A, B, dan seterusnya). Konektor/penghubung berperan untuk menghubungkan variabel-variabel proposisi. Tujuan dari logika proposisi adalah menganalisis nilai kebenaran proposisi baik secara individu/tunggal ataupun majemuk.

Beberapa contoh proposisi dan nilai kebenarannya:

1. Jakarta adalah ibu kota Negara Indonesia (benar).
2. Setiap empat persegi panjang adalah bujur sangkar (salah).
3. 4 adalah bilangan genap (benar).
4. $12 + 8 = 8 - 2$ (salah).

Kalimat berikut adalah contoh-contoh kalimat non-deklaratif (bukan proposisi/statemen):

1. X adalah kurang dari 5.
2. Pukul berapa sekarang?
3. Silahkan tinggalkan tempat ini sekarang!

Beberapa bentuk kalimat yang non-deklaratif:

1. Kalimat dengan eksklamasi (!)
2. Kalimat permintaan.
3. Kalimat bertanya (?)

1.2. Penghubung Proposisi

Dalam logika proposisi, terdapat lima macam konektor (penghubung) seperti berikut ini:

1. Atau (*or*), dengan simbol $\vee$
2. Dan (*and*), dengan simbol $\wedge$

3. Negasi (*negation*), dengan simbol $\sim$
4. Implikasi atau jika-maka atau if-then, dengan simbol $\rightarrow$
5. Biimplikasi atau jika dan hanya jika atau *if and only if*, dengan simbol $\leftrightarrow$

a. OR (atau, dengan simbol V)

Operasi OR (atau) pada dua proposisi A dan B disebut *disjunction* ditulis $A \vee B$, bernilai **salah** bila kedua proposisi A dan B bernilai salah. Perhatikan tabel kebenaran (*truth table*) operasi OR pada proposisi A dan B, sebagai berikut:

A	B	A v B
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Benar
Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Salah

Contoh 1.1

(1) Denpasar berada di pulau Bali **atau** $4 + 5 = 9$

{ A = benar } atau { B = benar }

(2) Denpasar berada di pulau Bali **atau** $4 + 5 = 45$

{ A = benar } atau { B = salah }

(3) Denpasar berada di pulau Jawa **atau** $4 + 5 = 9$

{ A = salah } atau { B = benar }

(4) Denpasar berada di pulau Jawa **atau** $4 + 5 = 45$

{ A = salah } atau { B = salah }

14. Andaikan $P(x)$ menyatakan statemen "x adalah seorang teknisi Komputer" dan $Q(x)$ menyatakan statemen "x memperpaiki Laptop". D = Himpunan semua orang. Tulis proposisi berikut dalam kata-kata atau kalimat. Selanjutnya tentukan nilai kebenarannya.

  a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  b) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
  d) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$

BAB 2 TEORI HIMPUNAN

Bab ini membahas:

1. Pengantar Himpunan
2. Penyajian Himpunan
3. Kardinalitas dan Jenis-Jenis Himpunan
4. Operasi terhadap Himpunan
5. Sifat-Sifat Operasi Himpunan
6. Pembuktian Himpunan
7. Latihan

2.1. Pengantar Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang berbeda dengan syarat yang sudah ditentukan. Himpunan digunakan untuk mengelompokkan sejumlah objek. Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang ditinjau merupakan subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu. Himpunan tersebut dinamakan himpunan semesta (himpunan universal) dan dinyatakan dengan **U** atau **S**.

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf besar A, B, C, H, K, dan sebagainya. Untuk menyatakan suatu himpunan, digunakan simbol "{.....}". Sementara itu untuk melambangkan anggota himpunan biasanya menggunakan huruf kecil a, b, c, x, y, dan sebagainya. Perlu diperhatikan bahwa penulisan anggota dalam suatu himpunan hanya sekali saja. Jadi, kita tidak boleh menuliskan himpunan sebagai {1,a,b,8,b}. Demikian pula kita tidak boleh menyatakan himpunan sebagai {bunga, kambing, sapi, kerbau, sapi, tumbuhan}. Untuk menyatakan anggota suatu himpunan digunakan lambang "$\in$"(baca: anggota), sedangkan untuk menyatakan bukan anggota suatu himpunan digunakan lambang "$\notin$" (baca: bukan anggota).

Contoh 2.1

1) Mahasiswa – mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit.
2) Buku – buku yang dijual dalam suatu toko.
3) Hewan – hewan yang ada di kebun binatang.

Contoh 2.2

A = Himpunan anggota keluarga adalah ayah, ibu, anak

B = Himpunan bilangan bulat antara 1 dan 5

2.2. Penyajian Himpunan

Himpunan dapat dinyatakan dengan empat cara penyajian, yaitu: mendaftarkan seluruh elemen-elemennya (enumerasi), menggunakan simbol-simbol baku, menyatakan syarat keanggotaan, dan menggunakan diagram Venn.

a. Enumerasi

Enumerasi adalah menuliskan atau mendaftarkan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal {...}. Metode enumerasi pada dasarnya digunakan untuk himpunan yang terbatas dan tidak terlalu besar.

Contoh 2.3

Himpunan A yang berisi empat buah bilangan asli pertama dapat ditulis A = {1, 2, 3, 4}.

Contoh 2.4

Himpunan B yang berisi lima buah bilangan genap positif pertama adalah $B = \{4, 6, 8, 10\}$.

Contoh 2.5

Misalkan A adalah himpunan hewan-hewan peliharaan di rumah, yaitu anjing, kucing, burung, maka A dituliskan menjadi A= {anjing, kucing, burung}.

Contoh 2.6

Meskipun himpunan biasanya digunakan untuk mengelompokkan objek yang mempunyai sifat mirip, tetapi dari definisi himpunan kita mengetahui bahwa sah-sah saja elemen-elemen di dalam himpunan tidak mempunyai hubungan satu sama lain, asalkan berbeda. Sebagai contoh, {kucing, a, Amir, 10, paku} adalah himpunan yang terdiri dari lima elemen, yaitu kucing, a, Amir, 10, paku.

Contoh 2.7

Contoh-contoh himpunan lainnya:

$R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$

$C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$

$K = \{\{\}\}$

Perhatikan dari contoh 2.7! C adalah himpunan yang terdiri dari tiga elemen, yaitu a, $\{a\}$, dan $\{\ a\}$. Contoh 2.7 memperlihatkan bahwa suatu himpunan dapat merupakan anggota himpunan lain. Perhatikan juga bahwa K hanya berisi satu elemen, yaitu {}. Lebih

10. Buktikan bahwa jika $A \cup B \subseteq A \cap B$ maka A = B.

11. Buktikan untuk himpunan A, B, dan C, bahwa:

(a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(b) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(c) jika $A \cap B \subseteq C$, maka $B - C \subseteq \overline{A}$

12. Didefinisikan *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E* sebagai berikut:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{2\}, \{\{4\}\}\}$, $C = \{1, \{1, 2\}$, $D = \{\{1, 2, 3\}\}\}$, $E = \{1, 2, 2, 1\}$. Untuk tiap *W*, *X*, *Y*, *Z* yang didefinisikan di bawah ini, nyatakan apakah ia adalah elemen atau himpunan bagian dari tiap-tiap himpunan *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

$W = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4\}$ dan $Z = \{2\}$

13. Diketahui $A = \{+, -\}$, $B = \{00, 01, 10, 11\}$.

(a) Daftarkan $A \times B$, dan

(b) A^4

BAB 3 RELASI

Bab ini membahas:

1. Pengertian Relasi
2. Operasi pada Relasi
3. Representasi Relasi
4. Relasi Invers
5. Sifat-Sifat Relasi
6. Relasi Ekuivalen
7. Latihan

3.1. Pengertian Relasi

Relasi adalah hubungan antara elemen dari dua himpunan. Relasi sering dijumpai pada berbagai masalah. Misalnya hubungan antara mahasiswa dengan mata kuliah yang diambil, hubungan antara bilangan genap dan bilangan yang habis dibagi 2, dan lain sebagainya. Di dalam bidang ilmu komputer, dapat dicontohkan hubungan antara program komputer dengan variabel yang digunakan, hubungan antara bahasa pemrograman dengan pernyataan (*statement*) yang sah, hubungan antara *plaintext* dan *chipertext* pada bidang kriptografi, dan sebagainya.

Cara menyatakan hubungan antara elemen dari dua himpunan adalah dengan himpunan pasangan terurut. Himpunan pasangan terurut diperoleh dari perkalian kartesius antara dua himpunan, misalkan A dan B adalah himpunan–himpunan. Suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(a,b) \in A \times B$ dan a berelasi dengan b, dituliskan $a\ R\ B$. Jika a tidak berelasi dengan b, maka dituliskan $a \not R b$.

Notasi : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ dan $b\}$

Ilustrasi di atas menyatakan relasi antara himpunan A dan B yang disebut dengan relasi biner. Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari A × B.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$

Jika (a,b) $\in R$, gunakan notasi aRb yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R, dan jika (a,b) $\notin$ R, maka gunakan notasi a $\not R$ b yang artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh relasi R. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari R dan himpunan B disebut daerah hasil (*range* atau kodomain) dari R. Jika A, B adalah himpunan berhingga maka perkalian $A \times B$ menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah |A|.|B| .

Contoh 3.1

Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b, c}.

Perkalian kartesius antara A dan B menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah |A|.|B| = 3.3 = 9 buah, yaitu:

A×B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

Misalkan didefinisikan R = {(1, a), (2, a), (3, c)}. Maka kita dapat melihat $R \subseteq$ (A x B), di mana A adalah daerah asal R dan B adalah daerah hasil R. Oleh karena itu, (1, a) $\in R$, kita dapat menuliskan 1 R a. Sementara (1, c) $\notin$ R, ditulis 1 $\not R$ c.

Contoh 3.2

Misalkan K = {2, 3, 4} dan L = {2, 4, 6, 8, 9, 16}.

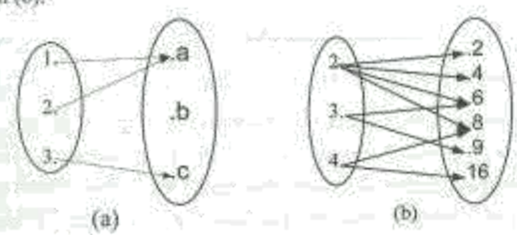
Misalkan pula relasi R dari K ke L didefinisikan sebagai berikut: " (k, l) $\in$ R jika k habis membagi l. Tentukan anggota R.

Jawab:

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 16), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (4, 16)}

Jelas bahwa R $\subseteq$ (K x L).

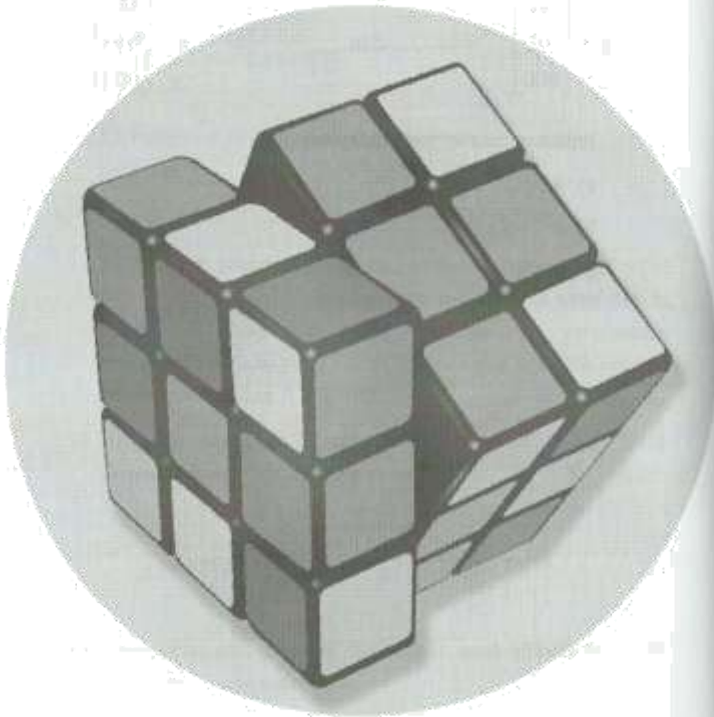
Pasangan terurut pada relasi dari himpunan A ke himpunan B dapat digambarkan dengan diagram panah. Gambarkan dua buah cakram/lingkaran, lalu tuliskan elemen–elemen A dan B pada masing – masing cakram. Jika $(a,b) \in R$, gambarkan panah dari a ke b yang menyatakan a berelasi dengan b. Diagram panah untuk masing–masing relasi pada contoh 3.1 dan contoh 3.2 diperlihatkan pada gambar 3.1 (a) dan (b).



Gambar 3.1 Diagram Panah untuk (a) Contoh 3.1 dan (b) Contoh 3.2

Diskusikan latihan soal berikut:

1. Misalkan A = {Amir, Budi, Cecep} adalah himpunan nama mahasiswa dan B = {INF0421, INF0422, INF0423, INF0424} adalah himpunan kode mata kuliah di Prodi Sistem Informasi, berapa jumlah anggota yang terbentuk dari $A \times B$?



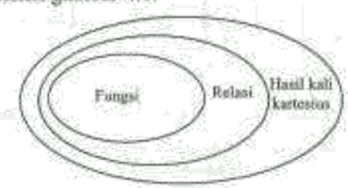
BAB 4 FUNGSI

Bab ini membahas:

1. Pengertian Fungsi
2. Jenis-Jenis Fungsi
3. Fungsi Invers
4. Komposisi Fungsi
5. Latihan

4.1. Pengertian Fungsi

Fungsi adalah jenis khusus dari relasi. Hubungan antara fungsi, relasi, dan perkalian kartesius dari himpunan X ke himpunan Y digambarkan dalam gambar 4.1.



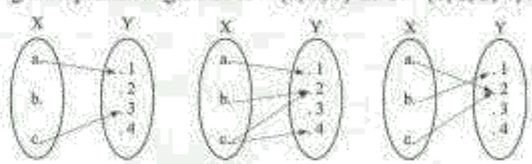
Gambar 4.1 Hubungan antara Fungsi, Relasi, dan Perkalian Kartesius

Misalkan X dan Y himpunan. Relasi biner f dari X ke Y merupakan suatu fungsi jika untuk setiap elemen x di dalam X terdapat satu elemen tunggal y di dalam Y sedemikian sehingga $(x,y) \in f$, kita tulis f(x) = y. Jika f adalah fungsi dari X ke Y, kita menuliskan $f : X \rightarrow Y$ yang artinya f memetakan X ke Y. Himpunan X disebut daerah asal (domain) f dan Himpunan Y disebut kodomain f. Kawan dari elemen $x \in X$ dinotasikan dengan f(x) dibaca 'harga fungsi f di x'. Himpunan semua harga fungsi f disebut daerah hasil (range) f. Jika f(x) = y, maka y dinamakan bayangan dari a, dan a dinamakan pra-bayangan dari b. Gambar 3.1 merepresentasikan fungsi dari X ke Y.

Gambar 4.2 Fungsi *f* memetakan X ke Y

Contoh 4.1

Manakah di antara relasi yang digambarkan dalam gambar 4.3 berikut ini yang merupakan fungsi dari X = {a, b, c} ke Y = {1, 2, 3, 4}?



(a) (b) (c)

Gambar 4.3

Jawab:

Suatu relasi yang ditunjukkan dengan diagram panah merupakan suatu fungsi, haruslah diperiksa berdasarkan dua hal berikut:

1. Setiap elemen $x \in X$ memiliki garis keluar dari x.
2. Garis yang keluar dari setiap elemen $x \in X$ haruslah tunggal (tidak boleh lebih dari satu).

a) Bukan fungsi karena ada $b \in X$ yang tidak memiliki kawan di Y. (tidak ada garis yang keluar dari $b \in X$, jadi tidak memenuhi syarat (1)).

b) Bukan fungsi karena $c \in X$ memilik lebih dari satu kawan di Y. (ada 2 garis yang keluar dari $c \in X$, jadi tidak memenuhi syarat (2)).

c) Merupakan fungsi karena ada satu garis yang keluar dari setiap elemen $x \in X$. Perhatikan bahwa f(a) = f(c) = 2. Meskipun ada elemen Y yang memiliki lebih dari satu kawan di X, hal ini tidak akan memengaruhi.

Contoh 4.2

Relasi *f* = { (1,u), (2,v), (3,w) } dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} adalah fungsi dari A ke B. Daerah asal dari *f* adalah A dan daerah hasil adalah B.

Contoh 4.3

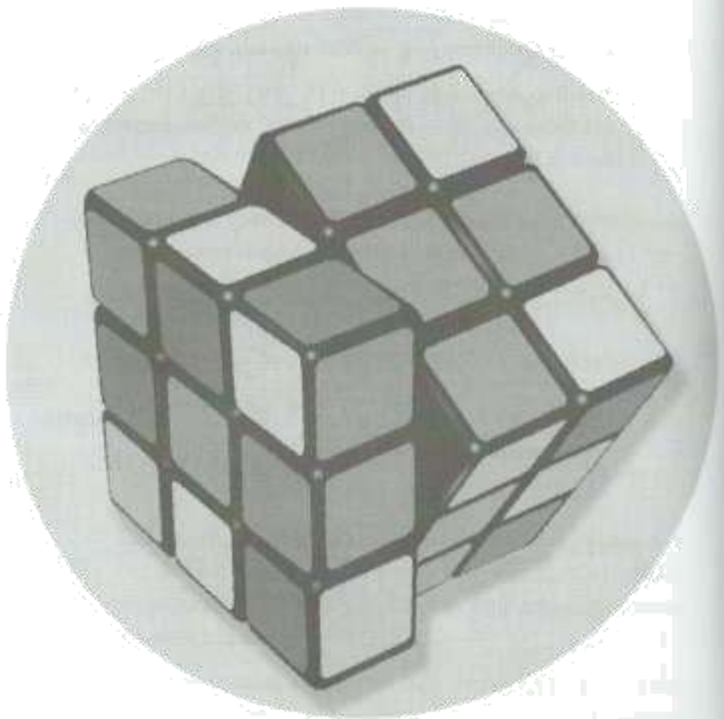
Relasi *f* = { (1,u), (2,v), (3,w)} dari A = {1, 2, 3, 4} ke B = {u, v, w} bukan fungsi dari A ke B karena daerah asal dari *f* {1,2,3} atau elemen A tidak sama dengan B.

Contoh 4.4

Relasi *f* = { (1,u), (1,v), (2,v), (3,w) } dari A = {1,2,3 }ke B = {u,v,w} bukan fungsi dari A ke B, karena dipetakan kedua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 4.5

Relasi *f* = {(1,u),(2,u),(3,v)} dari A = {1,2,3} ke B = {u,v,w} adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A.



BAB 5 BARISAN

Bab ini membahas:

1. Pengertian Barisan
2. Deret Bilangan
3. Penyelesaian Barisan Relasi Rekurensi dengan Iterasi
4. Latihan

5.1. Pengertian Barisan

Suatu barisan (*a sequence*) adalah suatu fungsi dari suatu variabel atau bilangan yaitu merupakan set dari bilangan, dengan urutan dan aturan yang pasti dan tetap. Barisan dinotasikan a_n, dengan *n* adalah bilangan bulat yang mempunyai bilangan yang berurutan secara teratur atas dasar aturan yang pasti dan tetap, di mana setiap bilangan a_n pada barisan disebut suku ke-n.

$$a_n = a_1, a_2, a_3 \ldots$$

Contoh 5.1

Diberikan barisan yang dinyatakan dengan $a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Jawab:

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ maka $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Menyatakan barisan dilakukan dengan berbagai cara, yaitu:

1. Menuliskan beberapa suku pertama suatu barisan tersebut, misalnya 3, 5, 7, ... Menyatakan barisan dengan cara ini memiliki kelemahan, yaitu kadang-kadang pembaca dibuat

salah mengerti terhadap kelanjutan suku–sukunya. Sebagai contoh pada barisan 3, 5, 7, ... di atas. Sering diartikan bahwa barisan tersebut adalah barisan bilangan–bilangan ganjil yang lebih besar dari 2 sehingga suku–suku selanjutnya yaitu 9, 11, 13, 15, ... Akan tetapi, mungkin pula diartikan sebagai barisan bilangan prima sehingga suku–suku selanjutnya 11, 13, 17, ... Untuk menghindari kesalahpahaman barisan tersebut dapat diperluas menjadi 3, 5, 7, 9, 11, ... (untuk menyatakan barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2).

2. Merumuskan secara eksplisit suku–sukunya, misalnya barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2 dinyatakan dengan rumus $a_n = 2n+1$ (n bilangan bulat ≥ 1). Dengan rumus tersebut barisan dapat dibuat dengan lebih cepat, yakni:

   $a_1 = 2.1+1 = 3$
   $a_2 = 2.2+1 = 5$
   $a_3 = 2.3+1 = 7$
   dan seterusnya

   Cara ini memiliki keuntungan dalam penentuan suku ke-n yang dapat dilakukan secara cepat dan tiap-tiap suku barisan dapat ditentukan secara tunggal.

3. Menyatakan barisan dengan cara rekursif

   Barisan yang dinyatakan dengan rekursif jika kondisi awal barisan sudah ditentukan dan suku–suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungan dengan sejumlah suku–suku yang sudah dinyatakan sebelumnya. Misal barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2 yakni 3, 5, 7, ... dapat dinyatakan dengan semua bilangan bulat k ≥ 1.

   $a_0 = 3$ sebagai kondisi awal dan $a_k = a_{k-1} + 2$ sebagai langkah rekursif. Dengan cara ini, suku–suku barisan selanjutnya dapat dihitung sebagai:

$a_1 = a_0 + 2 = 3 + 2 = 5$
$a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7$
$a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9$
⋮
dan seterusnya

Contoh 5.2

Suatu barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut.

Untuk semua bilangan bulat k ≥ 2, $a_k = a_{k-1} + k\,a_{k-2} + 1$. Dengan kondisi awal $a_0 = 2$, dan $a_1 = 3$, hitunglah a_5!

Jawab:

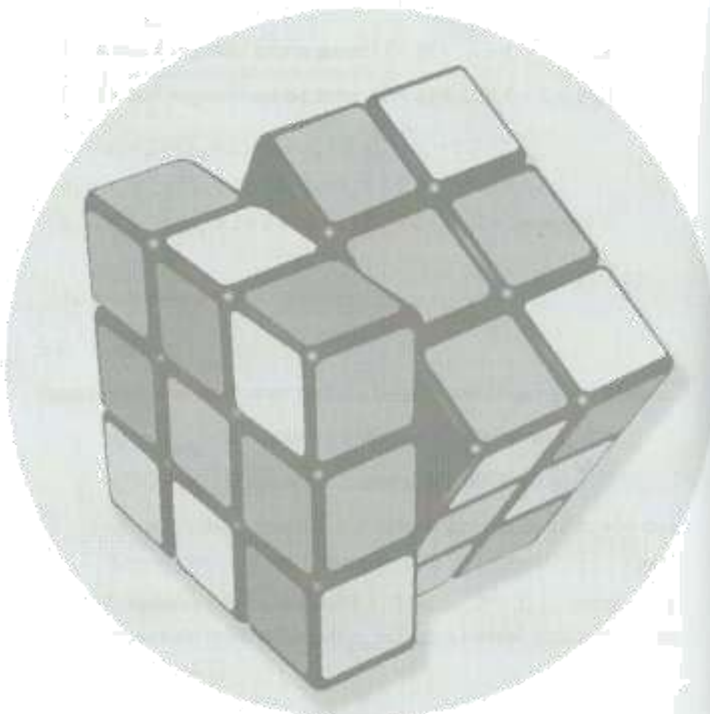
Untuk menghitung a_5 terlebih dahulu menghitung a_2, a_3, a_4.

$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 + 2a_0 + 1 = 3 + 2.2 + 1 = 8$
$a_3 = a_2 + 3a_1 + 1 = 8 + 3.3 + 1 = 18$
$a_4 = a_3 + 4a_2 + 1 = 18 + 4.8 + 1 = 51$
$a_5 = a_4 + 2a_3 + 1 = 51 + 5.18 + 1 = 142$

Jadi, $a_5 = 142$

Diskusikan latihan soal berikut:

1. Misalkan diberikan suatu barisan $a_1, a_2, \ldots$ dan $b_1, b_2, \ldots$ adalah dua barisan yang semuanya memenuhi barisan secara rekursif, nilai suatu suku sama dengan 3 kali suku nilai suku sebelumnya. Jadi, $a_k = 3a_{k-1}$ dan $b_k = 3b_{k-1}$ dengan kondisi awal $a_1 = 1$ dan $b_1 = 2$. Nyatakan barisan–barisan tersebut dengan cara menuliskan beberapa suku awal barisanya! Nyatakan kedua barisan tersebut merupakan barisan yang sama!



BAB 6 TEORI GRAF

Bab ini membahas:

1. Pengertian Graf
2. Dasar-Dasar Graf
3. Istilah dalam Graf
4. Jenis-Jenis Graf
5. Representasi Graf dalam Matriks
6. Graf Planar dan Graf Bidang
7. Latihan

6.1. Pengertian Graf

Teori Graf merupakan suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur dan sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai, antara lain struktur organisasi, bagan alir, pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain.

Banyak sekali struktur yang bisa dipresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan graf. Sering kali graf digunakan untuk mempresentasikan suatu jaringan. Misalkan jaringan jalan raya dengan kota sebagai simpul (*vertex*) dan jalan yang menghubungkan setiap kota sebagai sisi (*edge*) dan bobotnya (*weight*) adalah panjang dari jalan tersebut.

6.2. Dasar–Dasar Graf

Suatu graf G terdiri dari dua pasang himpunan yang berhingga (G = (*V*, *E*)), yaitu:

a. Himpunan V adalah himpunan titik-titik tidak kosong dari simpul/verteks/node dengan notasi V = V(G) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

b. Himpunan E adalah himpunan sisi/garis/edge yang dinotasikan dengan E = E(G) = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang menghubungkan dua simpul.

Berdasarkan kedua pernyataan di atas, bahwa V tidak boleh kosong dan E boleh kosong. Jika V kosong atau dengan kata lain graf yang tidak memiliki titik disebut graf kosong.

Suatu graf dinyatakan dengan G(V, E), di mana simpul dinyatakan dengan titik dan sisi dinyatakan dengan garis. Setiap garis berhubungan dengan satu titik atau dua titik. Garis yang hanya berhubungan dengan satu titik ujung disebut *Loop*. Dua garis berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut garis paralel.

Graf yang memuat dua simpul yang dihubungkan lebih dari satu garis merupakan graf sisi ganda. Sedangkan graf yang mempunyai simpul yang dihubungkan dengan lebih dari satu garis disebut multigraf (*multiple graph*).

Contoh 6.1

Diberikan 3 buah graf yaitu G_1, G_2, dan G_3 yang diperlihatkan pada Gambar 6.1 sebagai berikut:

Gambar 6.1

Pada contoh 6.1 G_1 graf sederhana dengan himpunan simpul *V* dan himpunan sisi *E* adalah:

$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

G_2 graf ganda dengan himpunan simpul *V* dan himpunan sisi *E* adalah

$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \{(1,2),(1,3),(1,3)(2,3),(2,4),(3,4),(3,4)\}$$
$$= \{e_1,e_3,e_4,e_2,e_5,e_6,e_7\}$$

G_3 graf semu dengan himpunan simpul *V* dan himpunan sisi *E* adalah

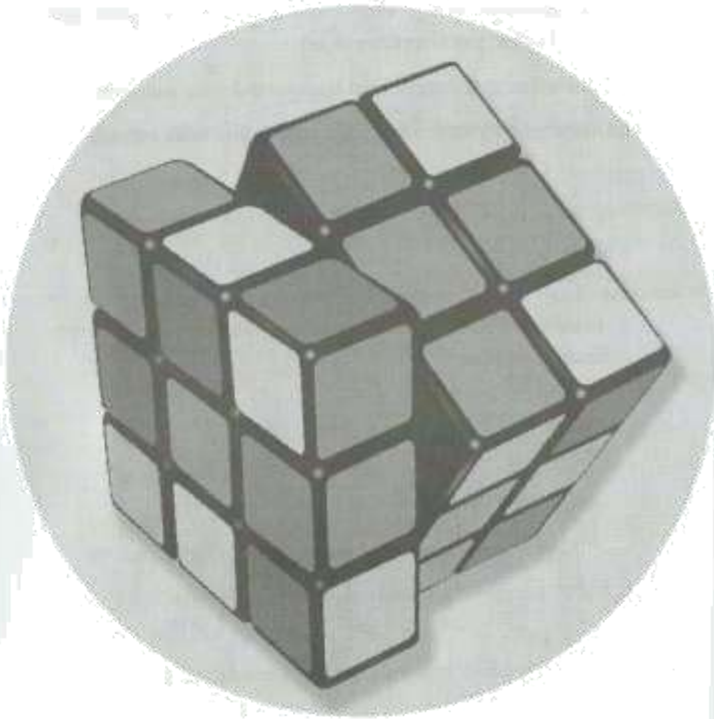
$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \{(1,2),(1,3),(1,3)(2,3),(2,4),(3,4),(3,4),(3,3)\}$$
$$= \{e_1,e_3,e_4,e_2,e_5,e_6,e_7,e_8\}$$

Pada G_2 terdapat sisi $e_3 = (1, 3)$ dan $e_4 = (1, 3)$ dinamakan sisi ganda (*multiple edge*) karena kedua sisi ini menghubungi dua simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3. Pada G_3 terdapat sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan gelang (*loop*) karena sisi tersebut berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Jumlah simpul pada graf dinyatakan dengan $n = |V|$ dan jumlah sisi dinyatakan dengan $m = |E|$. Pada contoh 6.1, G_1 mempunyai n = 4 dan m = 5, sedangkan G_2 mempunyai n = 4 dan m = 7.

Contoh 6.2

Ada 7 kota (A, B, C, D, E, F, G) yang beberapa di antaranya dapat dihubungkan secara langsung dengan jalan darat. Hubungan-hubungan langsung yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:



DAFTAR PUSTAKA

Ben-Ari, M. 2012. *Mathematical Logic for Computer Science*. Edisi Ketiga. London: Springer.

Gallier, J. 2017. Discrete Mathematics. Second Edition In Progress. Philadelphia: Springer.

Janacek, G.J. & Close, M.L. 2011. *Mathematics for Computer Scientist*. Hawai-USA: BookBoon Company.

Johnsonbaugh, R. 2005. *Discrete Mathematics*. Edisi Keenam. Upper Saddle River, NJ-USA: Pearson Prentice Hall.

Manongga, D. & Nataliani, Y. 2013. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Munir, Rinaldi. 2010. *Matematika Diskrit Edisi Revisi ke-4*. Bandung: Informatika.

Rosen, Kenneth. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Edisi Ketujuh. New York: McGraw-Hill.

Siang, Jong Jek. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Penerbit Andi.